

RESOLUTION DE PROBLEMES ET REPRESENTATIONS : CONSTRUCTION DE DESSINS LIBRES OU UTILISATION DE SCHEMAS PREDEFINIS?

Annick Fagnant*, Joëlle Vlassis**

* Université de Liège
Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education
FAPSE – B32 - Boulevard du Rectorat, 5
B - 4000 Sart Tilman
afagnant@ulg.ac.be

** Université du Luxembourg
Faculté des Lettres, des Sciences Humaines, des Arts et des Sciences de l'Education
2, route de Diekirch
L - 7220 Walferdange
joelle.vlassis@uni.lu

Mots-clés : Résolution de problèmes, Représentations, Schémas, Dessins

Résumé. Les études portant sur les représentations en résolution de problèmes mathématiques peuvent être organisées en trois axes : (1) Les élèves les plus compétents en résolution de problèmes construisent-ils des représentations ? ; (2) Est-il possible d'aider les élèves en accompagnant les problèmes de représentations ? ; (3) Est-il possible d'apprendre aux élèves à construire des représentations efficaces ? Le texte présente une étude empirique menée en grade 4 dans 11 classes luxembourgeoises (146 élèves). Les résultats montrent que les élèves ne recourent pas spontanément à la construction de représentations et ceci même lorsque les problèmes s'avèrent très complexes. Leurs résultats s'améliorent de façon assez nette lorsque les problèmes sont accompagnés de représentations qui mettent en évidence les données et les relations importantes du problème. Certains élèves parviennent d'ailleurs à réinvestir ces représentations par la suite.

1. Fondements théoriques

La construction d'une représentation est une étape essentielle de la démarche de résolution de problèmes mathématiques. Les études portant sur les représentations sont nombreuses et peuvent être organisées en trois axes.

Le premier axe s'intéresse aux stratégies développées par les élèves les plus compétents en résolution de problèmes : construisent-ils des représentations et quels types de représentations ? Plusieurs études (Hegarty & Kozhenikov, 1999 ; van Garderen & Montague, 2003 ; Uesaka, Manalo & Ichikawa, 2007) montrent assez clairement que la construction d'une représentation (mentale ou externalisée sur papier) est un facteur lié aux performances en résolution de problèmes. Les représentations efficaces sont de types schématiques, au sens où elles mettent en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent. A l'encontre, les représentations de types picturales, qui représentent la situation globale en mettant l'accent sur l'apparence visuelle des objets plutôt que de s'appuyer sur les relations mathématiques impliquées, sont quant à elle plutôt inefficaces.

La question qui reste ouverte quant à ce premier axe de recherches concerne la forme précise que doivent prendre ces représentations schématiques. S'il est clair que les représentations efficaces

doivent mettre en évidence les relations entre les éléments importants du problème, rien n'indique toutefois s'il est préférable de s'appuyer sur des schématisations prédéfinies correspondant à différentes catégories de problèmes (Diezman, 2002; Pantziara, Gagatsis & Elia, 2009) ou sur la production de dessins libres construits par les élèves (*self-generated drawings* - van Essen & Hamaker, 1990; van Meter & Garner, 2005).

Le deuxième axe s'intéresse à l'aide apportée par la présence de représentations qui accompagnent les énoncés des problèmes. Alors que la construction de représentations par les élèves eux-mêmes est incontestablement une aide à la résolution de problèmes, les résultats sont nettement plus controversés en ce qui concerne ce deuxième axe. Certaines représentations entravent la résolution en augmentant la charge cognitive sans apporter de réel soutien (Berends & Van Lieshout, 2009 ; Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007), d'autres représentations semblent même renforcer des démarches erronées (De Bock, Verschaffel, Janssens, van Dooren & Claes, 2003). Enfin, accompagner les problèmes de schémas prédéfinis à compléter semble être une aide pour certains élèves alors que cela semble davantage en perturber d'autres (Pantziara, *et al.*, 2009).

Plusieurs questions restent ici en suspens. Si l'on peut comprendre que certaines « illustrations » n'aident pas à la résolution de problèmes (représentations picturales, incomplètes ou peu utiles face à des problèmes trop simples pour les élèves), on s'interroge néanmoins sur le faible impact des représentations schématiques face aux problèmes non routiniers et complexes (Pantziara, *et al.*, 2009). Sont-elles trop abstraites (ou trop « incomplètes », puisqu'il s'agit souvent de représentations à compléter) pour que les élèves les comprennent ? Des représentations schématiques plus explicites ou plus proches de dessins construits de manière autonome (*self-generated drawings*) pourraient-elles s'avérer plus efficaces pour les jeunes élèves ?

L'enseignement/apprentissage de la construction de représentations est le troisième grand axe de recherches relatif à cette problématique. Les études peuvent être scindées en deux grandes catégories selon qu'elles s'intéressent à la construction autonome de dessins (*self-generated drawings*) ou à l'utilisation de schémas prédéfinis.

La revue de la littérature de van Meter et Garner (2005) mentionne peu d'études relatives au *self-generated drawings* en résolution de problèmes mathématiques. La seule étude qui traite explicitement de cette question en proposant un design quasi-expérimental classique (prétest – séquences d'enseignement – post-test) est l'étude de van Essen et Hamaker (1990). Ces chercheurs ont proposé une séquence d'enseignement/apprentissage d'une durée de 60 à 90 minutes à des élèves de grades 1-2 d'une part et de grade 5 d'autre part. Les élèves étaient invités à résoudre des problèmes en construisant des représentations dessinées et celles-ci étaient débattues en groupe *a posteriori* en vue de faire prendre conscience aux élèves de l'intérêt de cette stratégie et des caractéristiques d'une représentation efficace. Les résultats montrent un effet positif en grade 5, mais pas en grade 1-2.

Au niveau des recherches portant sur l'enseignement de schématisations prédéfinies, on trouve globalement deux types de schémas : les schémas liés aux typologies de problèmes arithmétiques mises en évidence dans les années 1980 par Riley, Greeno et Heller (1983) pour les problèmes additifs et par Greer (1992) pour les problèmes multiplicatifs, d'une part, et les schémas liés à la typologie de Novick et de ses collaborateurs (Novick, Hurley, & Francis, 1999) pour représenter un ensemble de problèmes variés, d'autre part. Les premiers types de schémas sont essentiellement utilisés dans des études portant sur des problèmes simples, généralement proposés en début d'enseignement primaire (voir Gustin & Romberg, 1995 pour une synthèse) alors que les seconds permettent d'aborder des problèmes plus complexes et plus variés (voir notamment Diezman, 2002 ; van Garderen, 2007 ; Pantziara *et al.*, 2009).

Dans la mesure où la construction de représentations est un élément important de la démarche de résolution de problèmes, la question de l'enseignement/apprentissage de cette stratégie spécifique devient *de facto* une question centrale. Plusieurs études semblent montrer la possibilité

d'apprendre aux élèves à utiliser des schématisations prédéfinies et trop peu se sont intéressées à l'efficacité d'un apprentissage de représentations construites de manière plus autonome. Les deux types d'approches (enseignement de schémas prédéfinis et apprentissage au *self-generated drawings*) semblent *a priori* possibles, mais ces approches conviennent-elles aux jeunes élèves et peuvent-elles être efficaces face à des problèmes variés et non-routiniers ?

Au travers d'une étude empirique menée en quatrième primaire dans des classes luxembourgeoises, la présente étude vise à apporter des éléments permettant d'éclairer certaines zones d'ombre laissées par les recherches antérieures.

A la croisée des trois axes de recherches définis précédemment, l'étude s'intéresse aux représentations construites spontanément par les élèves et à leur efficacité relative (axe 1). Elle cherche à voir si les élèves de grade 4 peuvent comprendre des représentations schématiques proches de dessins libres (de type *self-generated drawing*) ou des représentations schématiques proches de schémas prédéfinis (issus de la typologie de Novick, 2006 ; Novick *et al.*, 1999) et si cela peut les aider à résoudre des problèmes (axe 2). Deux indicateurs permettront aussi d'alimenter le questionnement relatif au type d'approche d'enseignement/apprentissage à privilégier (axe 3) : comparer l'aide apportée par les dessins libres ou les schémas prédéfinis lorsque ces représentations accompagnent les problèmes, d'une part, et analyser dans quelle mesure les élèves peuvent réinvestir les deux types de représentations en les produisant eux-mêmes face à d'autres problèmes, d'autre part.

2. Procédure

Un test papier-crayon a été proposé dans 11 classes de grade 4 issues de 6 écoles primaires luxembourgeoises. Au total, 146 élèves ont participé aux trois parties du test. L'épreuve s'est déroulée entre le 18 janvier et le 6 février 2010.

Le testing est organisé en trois parties, chacune constituée de 4 problèmes. La première partie est commune pour tous les élèves. Elle propose 4 problèmes complexes que les élèves sont invités à résoudre en indiquant leur démarche sur la feuille. Aucune consigne spécifique n'est donnée quant à la façon de résoudre les problèmes. Les quatre problèmes sont structurés de façon à correspondre aux différentes catégories de schémas mises en évidence par Novick (2006 ; schéma de type « réseau » pour les deux premiers problèmes, de type « tableau » pour le troisième et de type « partie-tout » pour le quatrième problème). La première partie du test vise à cerner les démarches spontanées des élèves et à obtenir une mesure d'entrée qui servira de point de comparaison pour les autres parties du test.

Pour la deuxième partie du test, deux versions différentes sont proposées ; elles sont réparties aléatoirement dans les classes. Chaque version contient les 4 mêmes problèmes (qui sont des versions parallèles des problèmes proposés dans la partie 1), mais ce sont les représentations proposées qui varient. Dans la première version (groupe 1), les problèmes sont représentés par des schémas assez abstraits correspondant aux différentes catégories précédemment citées (comme dans l'étude de Pantziara *et al.*, 2009). Dans la deuxième version (groupe 2), les problèmes sont représentés par des dessins plus concrets, mais qui mettent en évidence les relations entre les éléments importants du problème (il s'agit donc là aussi de représentations schématiques, au sens de Hegarty & Kozhenikov, 1999, et non de représentations picturales).

Deux exemples de problèmes sont proposés ci-après à titre illustratif, accompagnés des représentations qui accompagnaient les problèmes dans la deuxième partie du test (schémas prédéfinis pour le groupe 1 et dessins libres pour le groupe 2).

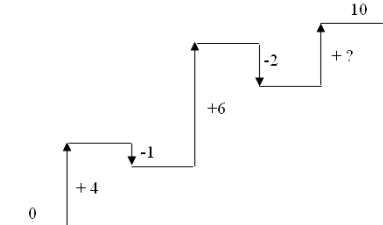
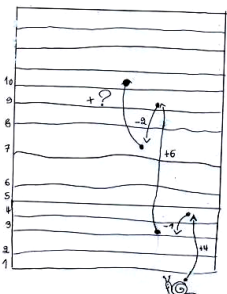
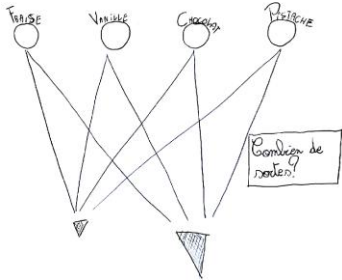
| Problème de type « changement » | Problème de type « combinaison multiplicative » | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|---------|----------|----------|----------|----------|----------------|--|--|--|--|----------------|--|--|--|--|
| <p>Un escargot essaie d'escalader un mur de briques. Il grimpe tout d'abord le long des quatre premières briques, puis il s'arrête épuisé et il s'endort. Pendant son sommeil, il glisse et redescend d'une brique. A son réveil, il grimpe cette fois de six briques, puis il s'endort à nouveau, glisse et redescend de deux briques. Lors de sa dernière tentative, il atteint la dixième brique. Combien de briques l'escargot a-t-il grimpées lors de sa dernière tentative ?</p> | <p>Le marchand de glaces de mon quartier vend des boules de glace à la fraise, à la vanille, au chocolat et à la pistache. Il propose deux sortes de cornets : des petits cornets et des grands cornets. Combien de sortes de cornets de glace à une boule ce marchand peut-il faire ?</p> | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Schéma prédéfini (de type « réseau »)</p>  | <p>Schéma prédéfini (de type « tableau »)</p> <table border="1" data-bbox="833 792 1289 958"> <thead> <tr> <th></th> <th>Fraise</th> <th>Vanille</th> <th>Chocolat</th> <th>Pistache</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>Petits cornets</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Grands cornets</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> | | Fraise | Vanille | Chocolat | Pistache | Petits cornets | | | | | Grands cornets | | | | |
| | Fraise | Vanille | Chocolat | Pistache | | | | | | | | | | | | |
| Petits cornets | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Grands cornets | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Dessin libre</p>  | <p>Dessin libre</p>  | | | | | | | | | | | | | | | |

Figure 1 : Exemples de problèmes et de représentations proposées dans le test

La troisième partie propose à nouveau 4 problèmes parallèles à ceux proposés précédemment. Cette fois, les élèves sont invités à les résoudre en produisant une représentation du même type que celles qu'ils ont rencontrées dans la deuxième partie du test. Deux versions du test sont à nouveau proposées ; elles diffèrent au niveau des consignes spécifiques qui sont fournies aux élèves quant à la façon de construire les représentations. L'objectif est ici de voir dans quelle mesure les élèves parviennent à réinvestir efficacement les types de représentations rencontrés précédemment.

Pour que les élèves n'identifient pas trop aisément le parallélisme entre les problèmes des trois parties du test, les énoncés sont formulés dans des contextes différents (peu de similitude de surface) et les types de problèmes sont mélangés d'une partie à l'autre.

3. Résultats

L'analyse des résultats est organisée autour de trois questions correspondant aux axes de recherche définis précédemment. La question 1 s'intéresse aux représentations spontanées (axe 1), la question 2 à l'aide que peuvent apporter les représentations schématisées qui accompagnent d'emblée les

problèmes et à l'influence du type de représentations (axe 2). La dernière question concerne la problématique d'enseignement/apprentissage (axe 3). Elle analyse de quelle manière les élèves réinvestissent les représentations schématiques (dessins libres ou schémas prédéfinis) qui leur ont été présentées précédemment dans la partie 2.

3.1. Les enfants recourent-ils spontanément à des représentations externalisées sur papier ?

L'analyse des résultats des élèves aux quatre problèmes de la partie 1 témoigne d'importantes difficultés dans la résolution de ces problèmes non routiniers. Les taux de réussite oscillent, selon les problèmes, entre 19% et 34% seulement. Rappelons qu'aucune consigne particulière n'accompagnait les énoncés et que les élèves n'étaient pas explicitement invités à utiliser des représentations. Les 146 élèves ont reçu chacun quatre problèmes, ce qui offrait 584 occasions de construire des représentations. Cependant, seules 9 représentations ont été produites spontanément. Ces 9 représentations étaient des dessins libres qui concernaient essentiellement le problème de type « combinaison multiplicative » correspondant à la catégorie de schéma de type « tableau ». Il s'agissait de combiner des types de pains (blanc, gris, complet) avec des formes de pains (pain carré, pain rond ou baguette). Les élèves dessinaient généralement les différentes modalités possibles ou, dans les cas incorrects, seulement une partie de celles-ci. Sur les 9 représentations, 6 ont abouti à une réponse correcte. Le faible nombre de représentations empêche évidemment de tirer la moindre conclusion quant aux liens entre représentation et résolution. Ce qui est clair, c'est que la très grande majorité des élèves ne recourent pas spontanément à des représentations pour résoudre des problèmes non routiniers.

3.2. Les représentations schématiques apportent-elles une aide à la résolution de problèmes ?

Pour mesurer l'impact de la présence de représentations dans les problèmes, nous avons comparé les scores moyens de chacun des deux groupes entre la partie 1 du test (problèmes seuls) et la partie 2 (problèmes accompagnés de représentations). Nous avons ensuite calculé l'ampleur de l'effet afin de quantifier l'ampleur de la différence entre les deux parties du test, c'est-à-dire le « gain » apporté par les représentations. Ces résultats sont présentés dans la figure 2 ci-dessous.

| | Partie 1 % moyen de réussite (écart type) | Partie 2 % moyen de réussite (écart type) | Ampleur de l'effet (comparaison parties 1 et 2) |
|---------------------------|--|--|--|
| Groupe 1 (schémas) | 27 % (30%) | 49 % (34%) | 0,69 |
| Groupe 2 (dessins) | 23 % (27%) | 42 % (33%) | 0,65 |

Figure 2 : Résultats moyens des élèves aux 4 problèmes des parties 1 et 2 et ampleur de l'effet

Les résultats de la figure 2 montrent que la présence de schémas prédéfinis ou de dessins libres augmente nettement les taux de réussite globaux des problèmes. Les valeurs de l'ampleur de l'effet témoignent de l'importance de la présence des représentations sur les performances des élèves dans la résolution des problèmes. Il convient de souligner que cet effet positif se manifeste pour les deux modalités de représentations investiguées, schémas prédéfinis ou dessins libres.

Si on observe un effet global positif de la présence des représentations sur la réussite des élèves, on peut se poser la question de l'effet des différents types de représentation sur chacun des problèmes. Il serait trop long de présenter ici l'ensemble des résultats pour les quatre problèmes. Nous proposons, à titre illustratif, de présenter ceux de deux problèmes : un problème de type « changement » (présenté avec un schéma de type « réseau » au groupe 1 et un dessin libre au groupe 2), et un problème de type « combinaison multiplicative » (présenté avec un schéma de type « tableau » au groupe 1 et un dessin libre au groupe 2). Nous avons choisi ces problèmes dans la mesure où ils présentent les effets les plus contrastés parmi les quatre problèmes. Des exemples d'énoncés, ainsi que les schémas prédéfinis et les dessins libres utilisés pour ces deux types de problèmes ont été proposés au point 2 de cet article. La figure 3 présente les résultats de ces deux

problèmes.

| | Problème de type « changement » | | Problème de type « combinaison » | |
|----------------------------|---------------------------------|------------------|----------------------------------|------------------|
| | % RC Partie 1 | % RC Partie 2 | % RC Partie 1 | % RC Partie 2 |
| Groupe 1 schémas | 19 % | 69 % | 34% | 34 % |
| Groupe 2 dessins | 19 % | 47 % | 25% | 46 % |

RC : réponses correctes

Figure 3 : Pourcentages de réponses correctes à deux problèmes des parties 1 et 2

L'analyse de la figure 3 révèle que selon la catégorie de schéma (*réseau* ou *tableau*) et le type de représentations (schémas prédéfinis ou dessins libres), les effets peuvent être très différents sur la réussite des élèves. En effet, dans le problème de type « changement », la présence d'un schéma prédéfini (groupe 1) fait passer le score de réussite de 19% (partie 1) à 69% (partie 2). Un effet important, mais moindre (de 19 à 47% de réussite), est également observé pour ce problème, grâce à la présence de dessins libres (groupe 2). Par contre pour le problème de type « combinaison », aucun effet de la présence d'un schéma prédéfini n'est observé alors que la présence d'un dessin libre augmente le taux de réussite de 21% (de 25% à 46%). Dans ce problème, le schéma prédéfini consistait en un tableau à double entrée. Cette représentation semble difficile à interpréter même par des élèves de grade 4. Par contre, le dessin libre proposé semble davantage faire sens pour les élèves, même s'il prend une forme assez différente des quelques rares représentations rencontrées en partie 1 face à ce type de problème.

Pour trois des quatre problèmes proposés (le problème de type « changement » présenté ici, un autre problème de type « changement » et un problème complexe de type « partie-tout » impliquant des relations multiplicatives et additives), la présence de schémas prédéfinis améliore davantage les performances des élèves que la présence de dessins libres. Les taux de réussite du problème de type « combinaison multiplicative » ne vont pas dans le même sens. On observe une amélioration nette avec le dessin libre (+ 21%), mais aucun progrès avec le schéma prédéfini. Il est donc difficile de se prononcer sur l'efficacité d'un type de représentation en particulier et ceci d'autant plus que s'entremêlent ici non seulement des représentations différentes (schémas prédéfinis vs dessins libres et comparaison entre trois types de schématisations prédéfinies) mais aussi des structures mathématiques de problèmes différentes.

3.3. Les élèves peuvent-ils réinvestir les représentations de type schéma prédéfini et/ou construire des représentations de type dessins libres ?

Analysons tout d'abord la performance moyenne des élèves à l'ensemble des problèmes de la partie 3 par comparaison à celle des deux autres parties. Les résultats sont présentés dans la figure 4 ci-dessous.

| | Partie 1 % moyen de réussite (écart type) | Partie 2 % moyen de réussite (écart type) | Partie 3 % moyen de réussite (écart type) | Ampleur de l'effet (Comp. parties 1 et 3) |
|----------------------------|---|---|---|---|
| Groupe 1 schémas | 27 % (30%) | 49 % (34%) | 42 % (32%) | 0,48 |
| Groupe 2 dessins | 23 % (27%) | 42 % (33%) | 37 % (34%) | 0,46 |

Figure 4 : Résultats moyens des élèves aux quatre problèmes des trois parties du test et ampleur de l'effet pour la comparaison partie 1- partie 3

On constate, à l'analyse de la figure 4, que l'effet des représentations accompagnant les problèmes dans la partie 2 persiste encore, mais dans une moindre mesure, dans la partie 3. Le calcul de l'ampleur de l'effet montre que la différence de scores entre les parties 1 et 3 est non négligeable (même si moins importante que la différence entre les parties 1 et 2). Rappelons que dans cette phase 3 de l'épreuve, les élèves étaient explicitement invités à résoudre les problèmes en produisant des représentations proches de celles qu'ils avaient rencontrées dans la partie 2. Pour le groupe 1, on proposait en rappel les trois exemples de squelettes de schémas (sans donnée), mais aucune indication n'était fournie quant au type de schéma à utiliser face à tel ou tel problème. Pour le groupe 2, on précisait qu'il fallait réaliser des dessins qui pouvaient prendre n'importe quelle forme (ils ne devaient pas « être beaux ») mais qui devaient contenir certaines informations (les informations importantes, ce qu'il faut chercher et une indication des liens entre les informations).

Ensuite, il convient d'examiner si cette amélioration des scores peut être attribuée à l'utilisation des représentations par les élèves. En d'autres termes, les élèves réinvestissent-ils les représentations rencontrées précédemment et celles-ci aboutissent-elles à des réponses correctes?

3.3.1. Les élèves réinvestissent-ils les représentations ?

La figure 5 présente le nombre de représentations, les représentations « attendues » et les représentations « attendues-correctes » produites par les élèves dans la partie 3 de l'épreuve. Les représentations « attendues » correspondent aux représentations que les élèves ont rencontrées dans la partie 2 selon la version reçue (groupe 1, les schémas prédéfinis et plus précisément le type de schéma correspondant à la structure du problème-cible; groupe 2, les dessins libres).

| | Problème de type « changement » | | | Problème de type « combinaison » | | |
|--|---------------------------------|------------------|------------------------|----------------------------------|------------------|------------------------|
| | Nb de représent. | Nb de repr. att. | Nb de repr. att.-corr. | Nb de représent. | Nb de repr. att. | Nb de repr. att.-corr. |
| Groupe 1 (N = 74) Schémas | 70 | 55 | 20 | 70 | 49 | 15 |
| Groupe 2 (N = 72) Dessins | 60 | 52 | 5 | 65 | 60 | 18 |

Figure 5 : Nombre de représentations produites par les élèves dans la partie 3

Suite à la demande explicite, une large majorité d'élèves produisent des représentations pour résoudre les problèmes de la partie 3. Ils sont 70 élèves sur 74 dans ce cas pour les deux problèmes dans le groupe 1 et on observe également une large utilisation des représentations par le groupe 2. Rappelons que dans la partie 1, presque aucun élève ne produisait de représentations spontanément.

Le nombre de représentations attendues est également élevé témoignant qu'un nombre important d'élèves reproduisent ou tentent de reproduire les représentations qu'ils ont rencontrées dans la partie 2 de l'épreuve. C'est le groupe 2, face au problème de type « combinaison » qui produit le plus grand nombre de représentations attendues (60 sur 72). Par contre, pour ce même problème, ils ne sont que 49 sur 74 à produire le tableau à double entrée. Cela semble confirmer la difficulté de ce schéma pour les élèves qui, rappelons-le, n'engendrait aucun progrès en termes de taux de réussite même lorsqu'il était donné d'emblée aux élèves.

Dans la figure 5, on observe également un écart assez élevé entre les représentations attendues et les représentations attendues correctes. Le nombre de représentations correctes peut sembler faible. Rappelons cependant que les élèves n'ont reçu aucun apprentissage spécifique et qu'ils y ont seulement été confrontés à une seule reprise lors de la partie 2 de l'épreuve.

Il faut également souligner que dans le groupe 2, face au problème de type « changement », seuls 5

élèves produisent un dessin libre correct. Dans le groupe 2, on trouve un nombre important d'illustrations de la situation (sans donnée) ou de dessins qui représentent uniquement la solution, et ceci face aux quatre types de problèmes. Ce phénomène n'est pratiquement jamais observé dans le groupe 1. Certains élèves du groupe 2 ont sans doute interprété les dessins libres comme des illustrations de la situation et non comme des représentations schématisées (et ceci malgré les consignes demandant explicitement d'indiquer les données et les relations qui les unissent).

3.3.2. Ces représentations sont-elles liées à des réponses correctes ?

Pour répondre à cette question, reprenons toujours les deux mêmes problèmes et examinons les résultats et le type de représentations produit. Ces informations sont présentées dans la figure 6 ci-dessous. Celle-ci présente le nombre de réponses correctes et de représentations correctes associées à ces réponses.

| | Problème de type « changement » | | | Problème de type « combinaison » | | |
|--|---------------------------------|----------------------|---|----------------------------------|-------------------|----------------------------|
| | Nb de RC Partie 1 | Nb de RC Partie 3 | Nb de reprs corr. liées ¹ | Nb RC Partie 1 | Nb RC Partie 3 | Nb de reprs corr. liées |
| Groupe 1 (N = 74) schémas | 14 (19%) | 25 (34%) | 18 (70% des RC) | 25 (34%) | 25 (34%) | 16 (64% des RC) |
| Groupe 2 (N = 72) dessins | 14 (19%) | 21 (29%) | 5 (24% des RC) | 21 (25%) | 25 (34%) | 16 (64% des RC) |

RC : réponses correctes

Figure 6 : Nombre de réponses et de représentations correctes à deux problèmes de la partie 1 et 3

La figure 6 montre des situations assez différentes selon les deux types de problèmes. En ce qui concerne le problème de type « changement », le groupe 1 réinvestit de manière efficace le schéma prédéfini rencontré précédemment. Sur les 25 réponses correctes, 18 font l'objet d'une représentation de type « réseau » correcte. Dans ce cas, on peut dire que les élèves ont été capables de reconnaître la structure du problème et de réinvestir le schéma déjà rencontré. Par contre, en ce qui concerne les dessins libres, la plupart des solutions correctes sont liées à des représentations partielles ou à des illustrations de la situation ou de la solution. Ce constat pourrait signifier que ces élèves n'ont pas réellement besoin de cette représentation pour réussir à résoudre le problème, que les représentations partielles étaient à leurs yeux suffisantes ou encore que les représentations proposées dans la partie 2 les ont aidés à se construire une représentation mentale correcte et schématique qu'ils ont pu réinvestir en partie 3.

Pour le problème de type « combinaison », les 25 réponses correctes des deux groupes sont associées à 16 représentations correctes. Les progrès entre les parties 1 et 3 sont néanmoins faibles, voire inexistantes.

Les résultats présentés dans la figure 6 montrent que les représentations semblent avoir joué un rôle dans la résolution correcte des problèmes de la partie 3. Précisons toutefois que ce constat doit être considéré avec prudence. Des analyses complémentaires sont en effet nécessaires pour dépasser les effets globaux et envisager des analyses en termes de profils d'élèves: il est en effet possible que les représentations ont aidé certains élèves, alors qu'elles en ont perturbé d'autres (cf. résultats de Pantziara *et al.*, 2009).

¹ Le nombre de représentations correctes repris ici indique le nombre total de représentations correctes liées à la réponse correcte (que celles-ci soient ou non des représentations « attendues » au sens défini précédemment). Par ailleurs, quelques rares représentations correctes n'ont pas abouti à la réponse correcte.

4. Conclusions

Notre étude visait à examiner l'impact des représentations schématiques sur les performances des élèves de grade 4 dans la résolution des problèmes non routiniers. Les questions posées portaient sur l'influence et l'utilisation des représentations par les élèves. Les résultats de la question 1 montrent que sans consignes spécifiques, les élèves de notre recherche n'utilisent spontanément aucune représentation pour résoudre ces problèmes pourtant complexes, comme en témoignent les faibles taux de réussite.

Ensuite, la question 2 investiguait l'influence de la présence de représentations schématiques dans les problèmes. Nous avons constaté un effet positif non négligeable (ampleur de l'effet supérieure à 0,60) sur la performance globale des élèves en présence de ces représentations, et ceci tant pour les schémas prédéfinis que pour les dessins libres. Ces résultats contredisent ceux de l'étude de Pantziara *et al.* (2009) qui ne constataient pas d'effet global positif lorsque les problèmes étaient accompagnés de schémas prédéfinis à compléter (les dessins libres n'ont pas été utilisés par ces auteurs). Ceci pourrait s'expliquer par les pratiques de classes des élèves luxembourgeois peu habitués à ces problèmes et aux représentations, alors que certains types de problèmes utilisés par Pantziara *et al.* (2009) faisaient partie des manuels des élèves. Leur plus grande familiarité avec les contenus aurait alors pu contrecarrer d'une certaine façon l'effet des schématisations. Une autre hypothèse explicative est que les schémas proposés dans notre étude étaient assez complets et explicites alors qu'ils étaient plutôt abstraits et incomplets (à peine ébauchés parfois) dans l'autre étude. Par contre, nous avons constaté, à l'instar de ces auteurs, des différences d'impact selon les types et catégories de schémas prédéfinis (la présence de représentations de type « réseau » - mais aussi de type « partie-tout » - engendre un effet positif important alors que ce n'est pas le cas du schéma de type « tableau »).

D'un autre point de vue (comparaison schéma prédéfini *vs* dessins libres), l'impact du schéma « réseau » est plus important que celui du dessin libre correspondant alors qu'à l'inverse le schéma « tableau » n'a aucun effet tandis que le dessin libre parallèle exerce un impact positif. Ces résultats peuvent s'expliquer par le caractère relativement abstrait d'un tableau à double entrée dont il convient de bien décoder les règles implicites. Le schéma prédéfini correspondant au problème « réseau » était proche d'un dessin libre et présentait peu de règles implicites à comprendre.

Enfin la dernière question concernait le réinvestissement des représentations par les élèves pour résoudre les problèmes de la partie 3. Globalement, nous avons constaté qu'une large majorité des élèves produisent ou tentent de produire des représentations similaires à celles qui leur ont été présentées. Les problèmes de cette dernière partie sont globalement mieux réussis que ceux de la première partie (ampleur de l'effet de 0,47 pour le groupe 1 et 0,46 pour le groupe 2) mais un peu moins que ceux de la partie 2. Même si, malgré les précautions prises, on ne peut exclure totalement un effet d'apprentissage dû aux trois versions (*effet de testing*), nos résultats laissent penser que cette amélioration des scores semblerait bien liée à une utilisation plus efficace des représentations, schématisées sur papier ou éventuellement intériorisées.

On peut donc affirmer que, globalement, les représentations schématiques constituent un soutien important pour les élèves dans la résolution de problèmes complexes. Les résultats mettent en évidence une amélioration importante des performances des élèves alors que ceux-ci n'ont été confrontés qu'une seule fois à des représentations et qu'aucun apprentissage explicite ni débat entre les enfants n'ont eu lieu (la situation est en ce sens nettement moins favorable que dans l'étude de van Essen & Hammaker, 1990). Il conviendrait dès lors d'intégrer, dans l'enseignement de la résolution de problèmes, un apprentissage explicite de différentes formes de représentations, qu'il s'agisse de représentations spontanées à exploiter et à débattre en classe ou de schémas plus conventionnels à construire progressivement avec les élèves. Un enjeu essentiel est d'amener les élèves à prendre conscience de l'importance de ce puissant outil d'aide à la résolution de problèmes.

5. Références

- Berends, I.E. & van Lieshout, E.C.D.M. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction, 19*, 345-353.
- De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction, 13*, 441-463.
- Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom, 7*(3), 4-8.
- Elia, I., Gagatsis, A. & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17*, 658-672.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouws, (Ed). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*: (pp. 276-295). New York.: Macmillan Publishing.
- Gustein, E. & Romberg, T. (1995). Teaching children to add and subtract. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(3), 283-324
- Hegarty, M. & Kozhenikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4), 684-689.
- Novick, L.R. (2006). Understanding spatial diagram structure: An analysis of hierarchies, matrices, and networks. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 59* (10), 1826-1856
- Novick, L.R., Hurley, S.M. & Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition, 27* (2), 288-308.
- Pantziara, M., Gagatsis, A. & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 39-60.
- Riley, M.S., Greeno, J.G., & Heller, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.
- Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction, 17*, 322-335.
- van Essen, G. & Hammaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83*(6), 301-312.
- van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical world problems. *Journal of Learning Disabilities, 40*(6), 540-553.
- van Garderen, D. & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(4), 246-254.
- van Meter, P. & Garner, J. (2005). The promise and practice of learner-generated drawing: Literature review and synthesis. *Educational Psychology Review, 17*(4), 285-325.