CONNAISSANCES MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNANT ET BIFURCATIONS DIDACTIQUES : ANALYSE D'UN EPISODE

Stéphane Clivaz

Université de Genève et HEP Vaud
Av. de Cour 33
CH-1014 Lausanne
stephane.clivaz@hepl.ch

Mots-clés : *Connaissances mathématiques, structuration du milieu, bifurcation didactique*

Résumé. *Le texte porte sur l'analyse d'un épisode d'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Au moyen d'une analyse descendante et d'une analyse ascendante de la structuration du milieu, une série de bifurcations didactiques sont décrites et permettent d'expliquer les tensions générées entre l'enseignant et un élève. L'analyse en terme de connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement et de pertinence mathématique de l'enseignant permet de mettre en évidence certaines causes de ces bifurcations.*

---

1. Introduction

L'analyse présentée est une partie d'une recherche doctorale visant à décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignant-e-s primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques. Le cadre théorique s'appuie sur les *catégories de connaissances mathématiques* (Ball, Thames & Phelps, 2008), sur les critères de *pertinence mathématique du professeur* élaborés par Bloch (2009) et sur la structuration du milieu et sa déclinaison en *niveaux d'activité du professeur* (Margolinas, 2002).

L'analyse portera sur un épisode d'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Cet épisode fait apparaître des bifurcations didactiques dans la structuration du milieu. Les catégories de connaissances mathématiques et la pertinence mathématique permettront d'expliquer ces bifurcations.

2. Cadre théorique et problématique

Ball et ses collègues (2008) proposent de classifier les différentes *connaissances mathématiques pour l'enseignement* (CME) selon le découpage suivant :

Connaissances du sujet :
- Connaissances mathématiques communes (CMC)
- Connaissance de l'horizon mathématique (CHM)
- Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS)

Connaissances pédagogiques du contenu
- Connaissances des manières possibles d'enseigner le sujet (CC)
- Connaissances des réactions des élèves sur le sujet (CE)
- Connaissances des programmes et des moyens d'enseignement (CP). (p. 403)

Les CMS sont des connaissances mathématiques dont ne disposent pas d'autres professionnels utilisant les mathématiques. C'est le cas par exemple quand il s'agit d'expliquer pourquoi « pour

multiplier par 10, on ajoute un zéro », quand il faut analyser des erreurs d'élèves ou quand il faut décider si une procédure originale proposée par un élève est correcte. Une situation particulière nécessitant ces *connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement* est celle de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication (Ball, Hill & Bass, 2005, pp. 17-21). Ces CMS se distinguent des CMC, mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

> Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. […] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves *mathematical* reasoning as much as it does pedagogical thinking. (Ball *et al.*, 2005, p. 21)

Afin de distinguer les effets des connaissances mathématiques de l'enseignant-e, Bloch (2009) propose quant à elle de distinguer divers degrés de *pertinence mathématique des interventions du professeur* selon les trois critères suivants :

- […] capacité à interagir avec les élèves sur des éléments mathématiques de la situation et à encourager l'activité des élèves par des interventions et des retours sur leur production mathématique
- […] tolérance aux formulations provisoires et approximatives, aux expressions dans l'action, et la capacité à reconnaître les idées mathématiques qui sont incluses dans des ostensifs non canoniques
- […] aptitude à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation ; ceci inclut la capacité à sélectionner des formulations et à en laisser d'autres de côté, et à gérer la chronologie du débat sans le tuer par l'énoncé immédiat des meilleures productions ou du savoir visé. (p. 33)

Ces trois critères permettent ainsi d'évaluer les connaissances de la matière de l'enseignant-e en fonction de la manière dont elles conduisent à mettre en place une organisation didactique.

En vue d'analyser ces connaissances et leurs effets, tant sur la mise en place d'organisations didactiques que sur les interactions en classe, nous avons utilisé le modèle de structuration du milieu. Ce modèle a été développé par Margolinas (1992) qui a enrichi la structuration de Brousseau (1986) pour analyser les activités usuelles du professeur et *démêler* des pratiques qui sont imbriquées.

M_{+3} :M-Construction		P_{+3} : P-Noosphérien	S_{+3} : Situation noosphérienne
M_{+2} :M-Projet		P_{+2} : P-Constructeur	S_{+2} : Sit. de construction
M_{+1}: M-Didactique	E_{+1}: E-Réflexif	P_{+1}: P-Projeteur	S_{+1} : Sit. de projet
M_0 : M-Apprentissage	**E_0 : Elève**	**P_0 : Professeur**	**S_0 : Situation didactique**
M_{-1}: M-Référence	E_{-1}: E-Apprenant	P_{-1} : P-Observateur	S_{-1} : Sit. d'apprentissage
M_{-2}: M-Objectif	E_{-2}: E-Agissant		S_{-2} : Sit. de référence
M_{-3} : M-Matériel	E_{-3} :E-Objectif		S_{-3} : Sit. objective

Tableau 1 : : Structuration du milieu (Margolinas, 2002, p. 145)

Les niveaux d'activité du professeur et les situations ne sont pas réduits au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d'une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas, 1995, p. 96) et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l'action, mais aussi dans le passé ou le futur. Par exemple, durant le travail en classe, le professeur peut travailler au niveau +1 en projetant une future leçon ou en se souvenant de son travail passé de préparation. De la même manière, il est en tension entre son ambition, qu'elle concerne la leçon (niveau +1), le thème (niveau +2) ou plus généralement l'enseignement (niveau +3) et ce qu'il pense que les

élèves pourront répondre (niveau 0) ou la façon dont il souhaite les observer (niveau -1) (Margolinas, 2004, p. 75). La situation didactique S_0 peut ainsi être déterminée soit par une analyse ascendante, de S_{-3} à S_0, du point de vue de l'élève, soit par une analyse descendante, de S_3 à S_0, du point de vue du professeur.

L'analyse descendante est centrée sur l'activité du professeur. Elle permet d'appréhender la façon dont l'enseignant-e perçoit la situation d'enseignement et ses intentions didactiques. Elle présente un caractère *a priori* relativement aux faits observés (Coulange, 2001, p. 320). Les niveaux +3 à +1 sont réalisés, les niveaux inférieurs sont projetés (Perrin-Glorian, 1998, p. 28). Cette analyse constitue le point de vue du professeur. Il est construit avant la réalisation en classe et sert de filtre au travers duquel il est susceptible de prendre des décisions et d'interpréter les actions des élèves (Margolinas, 2004, p. 78). Du point de vue de la méthode, on s'appuie essentiellement sur le protocole de l'entretien avec les enseignant-e-s. Ce « choix de méthode ne donne qu'un accès partiel au projet préalable de l'enseignant » (Coulange, 2001, p. 320).

L'analyse ascendante présente « la caractéristique évidente d'une analyse a priori, dans le sens qu'elle ne dépend pas des faits d'expérience ou d'observation » (Margolinas, 1994, p. 30). Les connaissances des élèves sont moins complexes que celles de l'enseignant-e, toutefois elles ne sont pas de nature uniquement mathématique, mais aussi de l'ordre des « règles pérennes du contrat didactique » (Coulange, 2000, p. 246). Cette analyse est effectuée du point de vue de l'élève générique. Au sens strict, ce point de vue correspond à la constitution de la position E_0. Selon l'hypothèse faite par Margolinas, « on peut considérer une temporalité didactique dans laquelle les positions E_{n-1} sont passées et les positions E_{n+1} sont à venir » (1998), et donc partir de la position E_{-3} pour déterminer E_0.

Cette analyse ascendante du point de vue de l'élève conduit parfois à déterminer une ou plusieurs situations S_0 qui ne correspondent pas à la situation S_0 déterminée par l'analyse descendante du point de vue du professeur. Margolinas (2004) parle alors de *bifurcations didactiques* et considère les situation S_{-3}, S_{-2}, S_{-1} déterminées successivement et aboutissant à la situation S_0 du professeur comme une *branche principale* et les éventuelles autres branches comme des *branches marginales*. Ces branches peuvent conduire au niveau +1 à des tensions entre P_{+1} et E_{+1}, tension vue du point de vue du professeur comme des malentendus, et, du point de vue de l'élève, comme une rupture du contrat didactique, puisque le professeur n'a pas fourni le bon problème pour l'apprentissage du savoir visé (Margolinas, 2004, pp. 85-87).

La structuration du milieu didactique permet alors une analyse *a posteriori*, par comparaison avec la double analyse *a priori* (Margolinas, 1995). Dans le cadre de cette recherche doctorale, elle permet en particulier d'apporter quelques éléments de réponse à la question des effets de la pertinence – ou du manque de pertinence – des connaissances mathématiques des enseignants sur l'organisation didactique de leurs cours de mathématiques à l'école primaire.

3. Corpus de données et méthodologie de recherche

Ces modèles sont utilisés sur un corpus de données constitué de séquences d'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres ainsi que d'un entretien *ante* et d'un entretien *post* pour chaque série de leçon. Quatre enseignants vaudois ont été filmés durant cette séquence en 4P[1]. Le nombre de séances varie entre deux et neuf.

L'épisode analysé ici dure 27 minutes. Il est extrait d'une suite de 7 leçons que Dominique donne dans sa classe de 4P. L'épisode peut être situés dans la séquence grâce à la réalisation d'un synopsis (Schneuwly, Dolz & Ronveaux, 2006) et d'une macrostructure (Dolz & Toulou, 2008). Il a d'abord été transcrit et codé à l'aide du logiciel Transana (Fassnacht & Woods, 2002-2009) selon

[1] Elèves de élèves de 10 ans – équivalent CM1 français

les catégories de CME, la pertinence mathématique et les niveaux d'activité du professeur. Une analyse en terme de structuration du milieu a ensuite été menée. Cette analyse et ses résultats sont résumés ci-dessous.

4. Analyse et résultats

L'analyse *a priori* détaillée est faite d'un double point de vue. Celui de l'enseignant dans un mouvement descendant et celui de l'élève d'un point de vue ascendant. Une analyse *a posteriori* permet ensuite d'interpréter l'épisode enregistré et de chercher les causes des phénomènes observés dans les CME de l'enseignant et leur pertinence. Seules certaines parties de l'analyse ascendante et l'interprétation en terme de CME sont détaillées ici, les autres sont uniquement évoquées.

4.1 Analyse descendante

L'analyse descendante *a priori* du point de vue de l'enseignant permet la détermination de la situation didactique S_0. Elle permet également de montrer comment les CME de l'enseignant se déclinent à chaque niveau et conduisent Dominique à envisager une situation didactique dans laquelle il montrera tout d'abord une multiplication en tableau (voir **Figure 1**), puis la multiplication en colonnes usuelle en faisant le parallèle entre le résultat de chaque ligne du tableau et la ligne correspondante de la multiplication en colonnes.

4.2 Analyse ascendante

L'analyse ascendante *a priori* du point de vue de l'élève conduit à considérer, à partir du milieu matériel mis en place par l'enseignant, six situations de niveau 0.

4.2.1 Niveau -3 : Situation objective

Selon Margolinas (1995, p. 99) le milieu matériel M_{-3} pour E_{-3} doit contenir les éléments nécessaires pour entrer dans la question. La situation est non finalisée (Comiti, Grenier & Margolinas, 1995, p. 106). M_{-3} est donc constitué de la description « brute » de l'algorithme donnée par l'enseignant sur un exemple et par les connaissances anciennes et, en principe, mobilisables d'un élève générique.

Parmi ces connaissances, E_{-3} sait effectuer une addition en colonnes, ainsi qu'une multiplication par un nombre à un chiffre en colonnes. Il sait que « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro ». Cette *règle du zéro* a été rappelée de multiples fois et « justifiée » par induction à partir de produits connus. Elle est complètement naturalisée pour les élèves. E_{-3} sait que les nombres (implicitement inférieurs à 100) peuvent être décomposés en dizaines et unités. En particulier dans un nombre entre 11 et 19, « le un, c'est pas un, c'est dix ».

Le milieu matériel comprend également la description, donnée par l'enseignant, des algorithmes (en tableau et en colonnes) pour 12x17, ainsi que la description du lien entre les deux algorithmes sur cet exemple. La première ligne du tableau donne le même résultat que la première ligne de la disposition en colonnes, il en va de même pour la deuxième. La somme finale est identique.

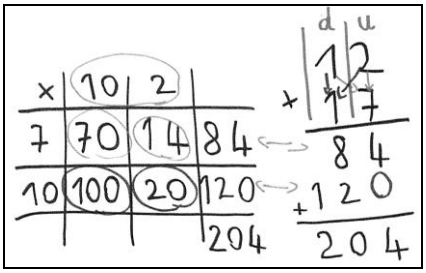

Figure 1 : Lien entre les deux façons d'effectuer la multiplication 12x17, effectuées sur affiche lors de la leçon 4

4.2.2 Niveau -2 : Situation de référence

L'élève E_{-2} est un élève agissant. Pour décrire S_{-2}, il faut trouver un enjeu dont la conclusion puisse être obtenue dans l'interaction de l'élève agissant avec le milieu objectif (Margolinas, 1995, p. 99). Cet enjeu peut donc être de « faire la multiplication » en même temps que l'enseignant qui donne son explication en interrogeant les élèves à chaque étape.

Le milieu M_{-2} est alors constitué de la situation S_{-3} et des explications et connaissances qui s'y trouvent. Il faut y ajouter les justifications que donne l'enseignant et les connaissances du métier d'élève de E, son habitude d'interagir avec cet enseignant et de répondre à ses attentes d'un enseignement par ostension. Les réponses possibles peuvent être déterminées *a priori* à partir des éléments du milieu.

La multiplication 12x17 en tableau est présentée comme une extension de la procédure vue l'année précédente. Selon ce qui est dit par l'enseignant, tant durant cette explication que lors des entretiens, il s'agit là d'une disposition de calcul. Le lien avec le produit cartésien ou l'aire du rectangle (lien dont l'enseignant n'est pas conscient) n'est jamais établi. Chaque produit est calculé pour lui-même, Pour E_{-2}, la *règle du zéro* est appliquée mécaniquement et la somme par ligne, écrite en ligne à la leçon 2, semble évidente. E_{-2} applique cet algorithme en tableau (à une ligne) de façon automatique. Le fait de décomposer le second facteur 17 en 10 et 7 et de créer ainsi une deuxième ligne ne sera pas remis en question. Cette remise en question sera d'autant plus fermée que l'enseignant a prévu de mettre les unités avant les dizaines, en ne le motivant auprès de élèves que par une utilité future pour la multiplication en colonnes. A la suite des deux sommes en ligne, E_{-2}, placé dans un contexte additif effectue par analogie une addition. Il est toutefois possible qu'une incitation de l'enseignant soit nécessaire afin de lui faire faire une opération (il pourrait laisser le tableau en l'état). L'apparition d'une multiplication semble ici peu probable, ne serait-ce que parce que les nombres en jeu (84 et 120) sont plus difficiles à multiplier que les nombres de départ.

La multiplication en colonnes de 12x17 est présentée immédiatement après celle en tableau et disposée à côté de cette dernière. Pourtant, ni le tracé des colonnes pour les dizaines et les unités, ni le fait d'écrire deux lignes en séparant les deux chiffres du 17, ni la façon d'effectuer ces deux lignes n'est rapprochée de la multiplication en tableau. Les deux lignes et la séparation du 17 sont simplement énoncées par l'enseignant et la façon d'effectuer chaque ligne est ramenée à la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres. Le parallèle est fait exclusivement en comparant le résultat de chaque ligne à la somme obtenue dans le tableau. Face à cette présentation, l'élève agissant E_{-2} va pouvoir investir quatre situations, notées en colonnes dans le **Tableau 2**. Soit utiliser les mêmes règles d'action que celles énoncées par l'enseignant (correspondance ligne à ligne), soit utiliser les résultats de chaque case du tableau pour établir la ligne correspondante (correspondance produit à produit), soit encore ne pas effectuer la multiplication en colonnes et écrire directement le résultat de chaque ligne, voire le résultat final

(utilisation directe du tableau). Il peut également ne faire aucune correspondance et effectuer les deux opérations de façon indépendante (algorithmes indépendants).

Pour ce qui est du zéro de la deuxième ligne, selon l'explication de l'enseignant, il faut « faire 12 fois 1, mais comme il ne s'agit pas de 1, mais de 10, il faut ajouter un zéro ». Ici trois situations S_{-2} semblent possibles. Elles sont notées en ligne dans le **Tableau 2**. La première serait d'appliquer mécaniquement la « recette » en mettant le zéro et en effectuant la suite de la multiplication (application recette), la deuxième serait de mettre en rapport ce zéro avec ceux figurant comme dernier chiffre dans chaque produit de la deuxième ligne du tableau (correspondance des zéros), la troisième serait de prendre en compte l'explication de l'enseignant, et donc de rajouter un zéro à chaque fois que, dans la multiplication en colonnes, le chiffre représente une dizaine (ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines).
En croisant les réactions possibles sur le lien entre les deux algorithmes et celles sur le zéro, il serait donc possible d'imaginer 12 situations :

			Attitudes par rapport au lien entre les deux algorithmes			
			Correspondance ligne à ligne *L*	Correspondance produit à produit *P*	Utilisation directe du tableau *D*	Algorithmes indépendants *I*
Attitudes par rapport au zéro de la deuxième ligne	Application recette	*r*	$(S_{-2})^L_r$	$(S_{-2})^P_r$	$(S_{-2})^D_r$	$(S_{-2})^I_r$
	Correspondance des zéros	*z*	$(S_{-2})^L_z$	$(S_{-2})^P_z$	$(S_{-2})^D_z$	$(S_{-2})^I_z$
	Ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines	*a*	$(S_{-2})^L_a$	$(S_{-2})^P_a$	$(S_{-2})^D_a$	$(S_{-2})^I_a$

Tableau 2 : Situations S_{-2} possibles.

Dans le tableau, chaque situation correspond à une des attitudes possibles par rapport au lien entre les algorithmes (codée en exposant) à une attitude possible par rapport au zéro (codée en indice). Quelques-unes sont décrites ci-dessous.

La situation $(S_{-2})^L_r$ représente la situation d'un élève E_{-2} qui verrait une correspondance entre chaque ligne de la multiplication en colonnes et le résultat de chaque ligne du tableau et qui, au moment de commencer la deuxième ligne placerait un zéro sans s'interroger sur la signification de ce zéro. La situation $(S_{-2})^P_z$ est celle d'un élève qui mettrait en correspondance chaque case du tableau avec un produit partiel en colonnes, remarquerait donc que les lignes de l'algorithme en colonnes sont déjà le résultat d'une addition, et remarquerait également que chaque produit de la deuxième ligne du tableau se termine par zéro, voire que ce zéro est « ajouté » car on multiplie par un nombre se terminant par 0, et donc que ce zéro est « ajouté » de la même maniée à la deuxième ligne de la multiplication en colonnes. La situation $(S_{-2})^L_a$ est paradoxale. D'un côté elle respecte la visée de l'enseignant déterminée par l'analyse descendante, puisqu'elle suppose un élève effectuant une correspondance ligne à ligne et appliquant la *règle du zéro*. D'un autre côté, elle pourrait conduire cet élève à "ajouter un zéro" à chaque fois qu'il travaille avec des dizaines, c'est à dire pour chaque produit partiel de la deuxième ligne, mais aussi pour le deuxième produit de la première ligne. Cette situation est donc mathématiquement incohérente, mais c'est celle qui correspond le mieux au contrat didactique.

D'autres situations sont incohérentes. Par exemple, pour $\left(S_{-2}\right)_a^P$, si l'élève fait une correspondance entre chaque case de la multiplication en tableau et le produit partiel correspondant de la multiplication en colonnes, il ne pourra pas appliquer la *règle du zéro* directement et sans se poser de question. Etant donné que ces situations, en plus d'être incohérentes ne correspondent pas aux intentions de l'enseignant déterminées par l'analyse descendante, elles sont très peu probables, voire impossibles. Ces cases sont grisées dans le tableau ci-dessus.

En revanche une situation n'apparaît pas dans la combinaison des possibilités, puisque E_{-2} peut recopier directement les lignes du tableau sans se préoccuper du zéro. Cette situation est nommée $\left(S_{-2}\right)_*^D$. Le nombre des situations S_{-2} possibles est ainsi de six.

4.2.3 Niveau -1, situation d'apprentissage et niveau 0, situation didactique

La poursuite de l'analyse ascendante permet la détermination de la situation S_0 du point de vue de l'élève et fait ainsi apparaître six situations. Une d'entre elle $\left(S_0\right)_a^L$ semble correspondre à la situation S_0. Cette correspondance n'est toutefois pas complète puisque le fait d' « ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines » n'est appliqué par l'enseignant que pour le premier produit partiel de la seconde ligne de l'algorithme en colonnes.

En terme de bifurcations didactiques, on ne peut dès lors considérer aucune branche comme principale et toutes les branches sont donc marginales ! De fait, la situation matérielle mise en place ne peut pas conduire à la situation didactique souhaitée par l'enseignant !

4.3 Analyse a posteriori

L'analyse *a posteriori* détaillée de l'épisode ne peut figurer ici. Elle confirme les tensions que ces bifurcations peuvent générer. La plupart des élèves se placent dans une situation $\left(S_0\right)_r^L$ en utilisant une correspondance ligne à ligne entre les deux algorithmes et en ne s'interrogeant pas sur la signification du zéro à la seconde ligne. Seul un élève, Armand, habitera la situation $\left(S_0\right)_a^L$, voulant ajouter un zéro à chaque fois qu'il effectue une multiplication par un chiffre des dizaines. Cette situation n'est pas cohérente. Elle nécessite soit le passage en $\left(S_0\right)_r^L$ par l'abandon de la justification « on ajoute un zéro quand on travaille avec des dizaines », soit le passage en $\left(S_0\right)_z^P$ pour comprendre cette justification. Le premier passage est obstinément refusé par l'élève qui semble ne pas supporter d'appliquer une recette sans la comprendre. Le second passage est systématiquement évité par l'enseignant qui tente de ramener l'élève à la situation S_0. Mais cette situation de l'enseignant n'est pas compatible avec le milieu matériel mis en place, sauf en modifiant le milieu en appliquant mécaniquement la *règle du zéro*, c'est à dire en rabattant la situation S_0 en situation $\left(S_0\right)_r^L$.

4.4 Connaissances mathématiques pour l'enseignement, pertinence et bifurcations didactiques

L'analyse *a posteriori*, s'appuyant sur l'analyse *a priori* montre que la démultiplication des situations de niveau 0 et le sentiment d'incommunicabilité, voire de quiproquo entre ces situations sont causés par certains choix faits par l'enseignant, soit au moment de la détermination de S_0, soit au moment de la mise en place de la situation de référence S_{-3}, mais aussi par l'impuissance de l'enseignant en position P_0 à adapter ses interventions didactiques à la situation de l'élève, ne serait-ce que pour faire évoluer cette dernière. Il s'agit maintenant de reprendre ces choix en les

rattachant aux connaissances mathématiques pour l'enseignement de Dominique et à sa pertinence mathématique.

Le premier choix à considérer est celui d'appuyer l'algorithme de la multiplication en colonnes sur celui de la multiplication en tableau en insistant sur la correspondance entre les lignes de l'algorithme en colonnes et les sommes par lignes du tableau. Les connaissances mises en jeux pour faire ce choix sont des connaissances du contenu du point de vue de son enseignement (CC, de par la volonté d'expliquer l'algorithme), des connaissances du programme et des moyens d'enseignement (CP, de par la connaissance de plusieurs algorithmes et de l'usage de l'algorithme en tableau) et des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement enfin (CMS, de par la connaissance de l'algorithme en tableau). Ces connaissances sont correctes. Il est plus difficile d'expliquer le choix de ne pas mettre en évidence la correspondance terme à terme, voire les tentatives d'esquiver cette correspondance. En fait Dominique possède la CMS de cette correspondance, comme il le montre lors des entretiens, mais cette connaissance n'est pas pertinente puisqu'elle ne lui permet pas d'interagir sur les éléments mathématiques de la situation, c'est à dire de se placer dans la situation $(S_0)_z^P$ ou il aurait pu retrouver l'élève Armand dans le passage considéré. La raison de cette absence de pertinence d'une CMS correcte et apparemment disponible est probablement à chercher dans la représentation qu'a Dominique de la multiplication.

Lors des séances en classe, Dominique affirme à plusieurs reprises que la multiplication est un raccourci de l'addition. Interrogé à ce sujet lors de l'entretien *post*, il répétera cela et ne donnera aucune représentation de type produit cartésien ou aire d'un rectangle. Ainsi la CMS de la multiplication en tableau est purement procédurale, le tableau n'est pas vu comme un produit cartésien, mais comme un endroit où l'on range des produits à additionner ensuite en ligne. Ce manque de compréhension du fondement de la multiplication en tableau va l'empêcher de l'utiliser avec pertinence pour interagir sur les aspects mathématiques de la multiplication en colonnes représentés par la situation $(S_0)_z^P$.

Le deuxième choix est celui de donner une recette pour la *règle du zéro*. Ce choix pose problème, à la fois dans l'application dans l'algorithme en colonnes puisqu'on n' « ajoute un zéro quand on travaille avec les dizaines » que au début de la deuxième ligne. Il pose également un problème de vocabulaire additif (ajouter) dans une situation multiplicative et est confondu avec l'ajout de la retenue. La non pertinence de la connaissance mathématique commune est ainsi liée dans ce cas à l'absence de la *version spécifique* de cette connaissance.

D'autres choix, plus secondaires, sont faits par l'enseignant et influencent la situation didactique. Il faut mentionner en particulier, parmi les éléments qui déterminent le milieu objectif et par suite les situations successives, le choix des nombres multipliés pour les premières multiplications, tous compris entre 12 et 19. Les raisons de cette option ne sont pas explicitées par Dominique, mais on peut penser qu'il vise une progression dans la difficulté. Ce choix a pour conséquence de rendre la seconde ligne de la multiplication en colonnes triviale, ce que l'enseignant ne mentionne jamais. Il a aussi pour conséquence de donner l'impression de refaire plusieurs fois la même multiplication et par exemple à Armand de poser plusieurs fois la même question, « c'est 1x1 ou 10x10 ? », à propos de plusieurs multiplications.

5. Conclusions

Cette recherche pose plusieurs questions en lien avec la thématique d'AREF 2010. Certaines d'entre elles sont liées à l'utilisation d'un cadre théorique issu partiellement de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et partiellement des travaux Nord-Américains en *math education*. La question de départ concernait les connaissances mathématiques de l'enseignant,

mais il a fallu la finesse du découpage en terme de structuration du milieu pour permettre de mettre en évidence un phénomène de bifurcations didactiques. C'est alors pour analyser les causes de ce phénomène que la distinction entre types de CME et la caractérisation de l'utilisation de ces connaissances en terme de pertinence s'est avérée fructueuse. Cependant la double origine de ce cadre théorique devra encore montrer son intérêt sur l'ensemble de la recherche.

Cette double origine du cadre théorique permet de s'interroger sur le fait que, si la question des connaissances mathématiques des enseignant-e-s est une question vive outre-Atlantique, surtout traitée du point de vue quantitatif de l'influence sur les performances des élèves (National Mathematics Advisory Panel, 2008), elle est moins discutée dans les travaux francophones, alors même que les outils de la didactique francophone des mathématiques peuvent en permettre une compréhension originale.

Il faut également mentionner les questions de traduction ou d'équivalence des concepts, en particulier de ceux de didactique et de *Pedagogical Content Knowledge* (Shulman, 1986). Le PCK est parfois simplement traduit par *didactique*, comme par Coppé qui affirme que, « compte tenu des recherches françaises, il est possible de faire cette traduction et donc, d'introduire cette catégorie [didactique] qui nous semble bien recouvrir ce que Shulman indique » (Coppé, 2007, p. 144). Il est parfois considéré comme légèrement différent, comme par Bloch (2009) qui le traduit par « didactique pratique ou pratique de la didactique » (p. 2) ou par Margolinas et ses collègues (2005, p. 206) qui souhaitent utiliser *didactique* même en anglais car elles considèrent que la signification n'est pas identique.

D'autres questions, en filigrane, sont liées à l'utilisation des outils issus de la théorie des situations didactiques, en particulier l'utilisation pour l'analyse d'une situation d'ostension de modèles développés sur des ingénieries didactiques ou sur des situations de classe dites « ordinaires », mais comportant toujours une forte composante adidactique. L'analyse de l'épisode d'enseignement résumé ici nous semble en tous les cas montrer l'intérêt de l'utilisation de cet outil dans une situation d'ostension.

6. Références et bibliographie

Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*(Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 21 juin 2010, dans http://archive.aft.org/pubs-reports/american_educator/issues/fall2005/BallF05.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. Consulté le 22 août 2010, dans http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389

Bloch, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x, 81*, 25-52

Brousseau, G. (1986). La relation didactique: Le milieu. In *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques* IREM de Paris 7.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble: La pensée sauvage

Comiti, C., Grenier, D. & Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Eds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 91-127). Grenoble: La Pensée sauvage.

Coppé, S. (2007). Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale. In G. Gueudet

& Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2006* (pp. 139-168). Paris: IREM Paris 7.

Coulange, L. (2000). *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique : Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble I, Grenoble.

Coulange, L. (2001). Enseigner les systèmes d'équations en troisième. Une étude économique et écologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 305-353

Dolz, J. & Toulou, S. (2008). De la macrostructure de la séquence d'enseignement du texte d'opinion à l'analyse des interactions didactiques. *Travail et formation en éducation*, (1). Consulté le 24 janvier 2010, dans http://tfe.revues.org/index596.html

Fassnacht, C. & Woods, D. K. (2002-2009). Transana (Version 2.41) [Mac]. Madison: University of Wisconsin. Consulté le 28 juin 2010, dans http://www.transana.org/

Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître: Les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 113-158. Consulté le 14 juin 2010, dans http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00458309/fr/

Margolinas, C. (1994). Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. In *Séminaire de didactique et technologies cognitives en mathématiques* (pp. 27-83). Grenoble: LSDD-IMAG. Consulté le 24 janvier 2010, dans http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418716/en/

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques : Actes du séminaire national 1993-1994*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Margolinas, C. (1998). Etude de situations didactiques "Ordinaires" À l'aide du concept de milieu : Détermination d'une situation du professeur. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Eds.), *Actes de la 9e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 35-43). Paris: ARDM. Consulté le 24 janvier 2010, dans http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418850/en/

Margolinas, C. (2002). Situations milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-155). Grenoble: La pensée sauvage.

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques.* HDR, Université de Provence - Aix-Marseille I. Consulté le 28 juin 2010, dans http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/en/

Margolinas, C., Coulange, L. & Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics, 59*, 205-234

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Fundation for success: The final report of the national mathematics advisory panel* Washington, DC: U.S. Department of Education. Consulté le 24 janvier 2010, dans http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf

Perrin-Glorian, M.-J. (1998). Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu. Structuration du milieu pour l'élève et pour le maître. In R. Noirfalise (Ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'université d'été de La Rochelle* (pp. 17-37): I.R.E.M. de Clermont-Ferrand.

Schneuwly, B., Dolz, J. & Ronveaux, C. (2006). Le synopsis: Un outil pour analyser les objets enseignés. In M.-J. Perrin-Glorian & Y. Reuter (Eds.), *Les méthodes de recherche en didactiques : Actes du premier séminaire international sur les méthodes de recherches en didactiques de juin 2005* (pp. 175-189). Villeneuve d'Ascq: Presses univ. du Septentrion.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. Consulté le 16 juin 2010, dans http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4